数理解析研究所講究録
81巻 1970年 33-45

多値論理について

東大・理・数
細井 勉

"多値論理" というとき, 一般には, Łukasiewicz の多値論理を指すものと受取られがちである. しかし, Łukasiewiczの多値論理は, Rosser と Turquette の仕事によって, 基礎論的には, 一段落しており, 興味もうすれているようである. また, 記号論理を研究する手段としては, Łukasiewicz の多値論理は, たいして有用なモデルを与えてはいない, という欠点も考えられる. 記号"論理" の研究対象とはいささか異種のものを扱っていることが, その理由でもあろうか.

そこで, 基礎論 (特に数理論理学) においてよく利用されている多値論理と, そこでのいくつかの結果について, 簡単に紹介したい. この種の多値論理は, Łukasiewicz の多値論理が二値論理の一種の拡張であるように, やはり, 二値論理の一種の拡張であるが, Łukasiewicz のものとは別

の方向へ拡張がなされたものである.

多値論理は，あくまでも，論理であるので，まず，"論理"の定義からはじめねばならない.

1. 論理

論理を定義する方法はいろいろとあろう.

また，論理とは何か，と見る，見方もいろいろあろう. Łukasiewicz 系統(?)では，基本的な論理とは二値論理であり，その中での論理演算を本質と見て，論理を考えているようである. 工学的応用などでは，このことは有効なのであろう. これとは別に，論理とは，valid (provable) formula の集合としてみて，代数的な意味の論理演算には重きをおかない見方もある. ここでは，後者の立場で，議論を展開したい.

範囲を，命題論理に限定しておくことにする. 論理記号としては，→ (if……, then……), & (and), V (or), ¬ (not) の四つを考える. 命題変数としては，アルファベットの小文字を用いる. 普通のようにして，wff (well-formed formula) を定義する. wff を表わすのに，アルファベットの大文字を用いる. wff 全体の集合

を $\mathbb{W}$ とする.

基礎論では，たいていの場合，"論理"を次のように定義する.

<u>定義 1.1</u> wff の集合で，modus ponens と代入法則に関して閉じたものを，"論理"とする."論理"が公理系 (or モデル) で定義されている場合，その"論理"に属す wff は，provable (or valid) であると言われる."論理"全体を $\mathfrak{L}$ で表わす.

<u>例 1.2.</u> 次の $\mathbb{L}_0$, $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{LK}$, $\mathbb{LJ}$ は論理である.

$\mathbb{L}_0 \overset{def.}{=\!=} \mathbb{W}$

$\mathbb{L}_1 \overset{def.}{=\!=} \{A \to A \mid A \in \mathbb{W}\}$

$\mathbb{LK} \overset{def.}{=\!=}$ {二値論理で valid な wff}

$\mathbb{LJ} \overset{def.}{=\!=}$ {直観主義論理で provable な wff}

定義により，論理とは，wff の集合なので，論理と論理の間に，集合の意味での包含関係 $\supset$, $\supsetneqq$，等が定義される．二つの論理が集合として一致することを，記号 $\supset\subset$ で表わすことにする.

$\mathfrak{L}$ において，集合演算 $\cup$ と $\cap$ とを考えたい.

"modus ponens に関して閉じている" という条件から，$\cup$ の定義に工夫が必要となる．

<u>定義 1.3.</u> $\Lambda \neq \phi$, $\lambda \in \Lambda$, $\mathbb{L}_\lambda \in \mathcal{L}$ に対し，

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda \overset{def.}{=\!=} \{A \mid A \in \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Lambda\}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda \overset{def.}{=\!=} \bigcap \{\mathbb{L} \in \mathcal{L} \mid \mathbb{L} \supset \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Lambda\}$$

により，$\cup$ と $\cap$ を定義する．

<u>系 1.4.</u> $\mathcal{L}$ は $\supset$ を順序関係とし，$\cup$ と $\cap$ に関して，complete lattice である．

基礎論では，$\mathbb{L}\mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{L}\mathbb{J}$ であるような論理 $\mathbb{L}$（中間論理という）を取扱うことが多い．

<u>定義 1.5.</u> $\mathcal{J} = \{\mathbb{L} \mid \mathbb{L}\mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{L}\mathbb{J}\}$

<u>定理 1.6.</u> $\mathcal{J}$ は complete lattice であり，関係

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda\right) \cap \mathbb{L} \supset\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{L}_\lambda \cap \mathbb{L})$$

は，ここで特長的である．

問題 1.7. $\mathscr{L}$, $\mathscr{I}$ の濃度は?

2. モデル

モデルにより論理を定義する方法も，いくつかあるが，ここでは，Łukasiewicz と類似の方法を用いることにする．(他にも，Kripke の方法等は有名である．)

モデル $\mathbb{M}$ の定義法はよく知られている通りである．しかし，念のため，はっきりさせておこう．

まず，truth value の集合 $V_{\mathbb{M}}$，designated value の集合 $D_{\mathbb{M}}$ として $V_{\mathbb{M}}$ の一つの部分集合，$V_{\mathbb{M}} \times V_{\mathbb{M}}$ から $V_{\mathbb{M}}$ への三つの関数 $\underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}$, $\underset{\mathbb{M}}{\&}$, $\underset{\mathbb{M}}{\vee}$, $V_{\mathbb{M}}$ から $V_{\mathbb{M}}$ への関数 $\underset{\mathbb{M}}{\neg}$ を用意する．f を，{命題変数} から $V_{\mathbb{M}}$ への関数 (assignment function) とする．wff A に対し，$f(A)$ の値とは，A の中の命題変数に対し f で定まる $V_{\mathbb{M}}$ の元を代入し，$\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\neg$ をそれぞれ $\underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}$, $\underset{\mathbb{M}}{\&}$, $\underset{\mathbb{M}}{\vee}$, $\underset{\mathbb{M}}{\neg}$ でおきかえたとき，その結果として定まる $V_{\mathbb{M}}$ の元のこととする．

定義 2.1. $\mathbb{M} = (V_{\mathbb{M}}, D_{\mathbb{M}}, \underset{\mathbb{M}}{\rightarrow}, \underset{\mathbb{M}}{\&}, \underset{\mathbb{M}}{\vee}, \underset{\mathbb{M}}{\neg})$ が論理 $\mathbb{L}$ のモデルであるということを，

$$\mathbb{L} \supset\subset \{ A \mid A \in \mathbb{W}, f(A) \in D_{\mathbb{M}}, \text{ for all } f \}$$

により定義する．特に，論理$\mathbb{L}$というかわりに，略して，（多値）論理$\mathbb{M}$とも言う．$\mathbb{M}$は$(V_{\mathbb{M}}, D_{\mathbb{M}})$とか$(V, D)$とか，略記されることもある．

ある論理$\mathbb{L}$を定義するモデル（その存在は，すぐ後で述べる）は unique ではない．

<u>定理 2.2.</u> $^{\forall}\mathbb{L} \in \mathfrak{L}$に対し，$\mathbb{M} \supset\subset \mathbb{L}$となるモデル$\mathbb{M}$で，$^{\#}V$が可付番であるものが存在する．

（証明）$V_{\mathbb{M}} = \mathbb{W}$，$D_{\mathbb{M}} = \mathbb{L}$ととれば明きらか．この場合，$^{\#}D_{\mathbb{M}}$も可付番である（$^{\#}\mathbb{L}$は必ず可付番）．

この定理により，論理を問題とするかぎり，たかだか可付番モデルを考えれば十分，であることがわかる．

<u>定理 2.3.</u> $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}$ のモデル$\mathbb{M}$において，$u, v \in V_{\mathbb{M}}$に対し，

$$u \geqq v \iff u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v \in D_{\mathbb{M}}$$

と定義すると，$\geqq$は$V_{\mathbb{M}}$に対する pseudo-order となる．特に，$^{\#}D_{\mathbb{M}} = 1$のときは，order となる．

（証明略）

定義 2.4. モデル$\mathbb{M}$が次の4条件を満足するとき，k-regular であるという．

(1) $^{\#}D_{\mathbb{M}} = k \quad (1 \le k \le \infty)$

(2) $D_{\mathbb{M}} \ni u,\ u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v \Rightarrow D_{\mathbb{M}} \ni v$

(3) $D_{\mathbb{M}} \ni v \Rightarrow D_{\mathbb{M}} \ni u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v$ for all $u \in V_{\mathbb{M}}$

(4) $\mathbb{M} \in \mathcal{L}$

(条件(3)は次の(3')から得られるものである．

(3') $D_{\mathbb{M}} \ni v \Rightarrow {}^{\exists}$ assignment function f, $^{\exists}A \in \mathbb{M}$, s.t. $f(A) = v$

定理2.5. k-regular モデル$\mathbb{M}$ $(k>1)$に対し，$\mathbb{M} \supset\subset \mathbb{N}$ であるような1-regular モデル$\mathbb{N}$が存在する．

(証明) $V_{\mathbb{M}}$ 中の equivalence relation $\sim$ を

$$u \sim v \Leftrightarrow D_{\mathbb{M}} \ni u \xrightarrow[\mathbb{M}]{} v,\ v \xrightarrow[\mathbb{M}]{} u$$

により定義し，$\mathbb{N} = (V_{\mathbb{M}}/\sim,\ D_{\mathbb{M}}/\sim)$ とすればよい．
$\xrightarrow[\mathbb{N}]{}$ 等は，代表元に対する $\xrightarrow[\mathbb{M}]{}$ 等により定めればよい．

$\mathcal{L}$の元である論理を考えるとき，1-regularモデルが本質的であることがわかる．

一般には$\mathcal{L}$の元$\mathbb{M}$においては，$^{\#}D_{\mathbb{M}} = 1$ にreduce できるとはかぎらない．たとえば，$\mathbb{L}_1$ はその反例となる．

定義2.4は，$^{\#}D_{\mathbb{M}}=1$にreduceできるための十分条件を述べたものであって，ぎりぎりのところを述べたものではない．しかし，その中の条件(4)は少ししかゆるめられないであろう．

<u>定理2.6.</u> $^{\#}V_{\mathbb{M}}<\infty$であるような1-regularモデルで定義される論理は，有限的に公理化できる(手続きがある)(証明略)

<u>問題2.7.</u> $^{\#}V_{\mathbb{M}}=\infty$の場合，あるいは む の元での場合ではどうか？

1-regularモデル$\mathbb{M}$では，2.3の$\geqq$を$V_{\mathbb{M}}$の順序とするとき，$V_{\mathbb{M}}$は$\underset{\mathbb{M}}{\&}$，$\underset{\mathbb{M}}{\vee}$を$\cup$，$\cap$としたlatticeであることがわかる．こまかい説明や定義は略すが，次の定理は有名．

<u>定理2.8.</u> 1-regularモデル$\Longleftrightarrow$最大元をもつ relatively pseudo-complemented lattice.

<u>問題2.9.</u> 一般の論理のモデル$\mathbb{M}$では，$V_{\mathbb{M}}$のlattice構造は

次に，Łukasiewicz の多値論理に準じた論理を定義する．

定義 2.10. $\mathcal{S}_n = (\{1, 2, \cdots, n, \omega\}, \{1\}) \quad (1 \leq n \leq \omega)$

$$u \xrightarrow[\mathcal{S}_n]{} v = \begin{cases} 1 & \text{if } u \geq v \\ v & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u \mathbin{\underset{\mathcal{S}_n}{\&}} v = \max\{u, v\}$$

$$u \mathbin{\underset{\mathcal{S}}{\vee}} v = \min\{u, v\}$$

$$\underset{\mathcal{S}_n}{\neg}\, u = \begin{cases} \omega & \text{if } u \neq \omega \\ 1 & \text{if } u = \omega \end{cases}$$

ここで，$\omega > i \qquad (1 \leq {}^{\forall} i \leq n)$ とする．

定理 2.11. (1) $\mathcal{S}_n \in \mathcal{I}$

(2) $\mathbb{LK} \supset\subset \mathcal{S}_1 \supsetneqq \mathcal{S}_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{S}_n \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{S}_\omega \supsetneqq \mathbb{LJ}$

(3) $\mathcal{S}_i$ と $\mathcal{S}_{i+1}$ の間の論理は存在しない（$i = 1, 2, \cdots$）

（証明略）

定理 2.12. $\mathcal{I}$ において

(1) $\neg$ はどんな論理においても定義不能．

(2) $\rightarrow$ と $\&$ は $\mathcal{S}_1$ においてのみ定義可能．

(3) $\vee$ は $\mathcal{S}_n$ $(1 \leq n \leq \omega)$ においてのみ定義可能．

(証明略)

3. operation

<u>定義3.1.</u> モデル$\mathbb{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$に対し，その直積を，

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda=\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}V_{\mathbb{M}_\lambda},\prod_{\lambda\in\Lambda}D_{\mathbb{M}_\lambda}\right)$$

(Πは直積を表わす)とし，論理演算を，

$$\Pi\,u_{\mathbb{M}_\lambda}\longrightarrow\Pi\,v_{\mathbb{M}_\lambda}\overset{def}{=}\Pi\,(u_{\mathbb{M}_\lambda}\underset{\mathbb{M}_\lambda}{\longrightarrow}v_{\mathbb{M}_\lambda})$$

のようにして定義する．これはモデルである．

<u>定理3.2.</u> $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda$

<u>問題3.3.</u> モデル$\mathbb{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$に対し，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{M}_\lambda$のモデルを得るためには，どのような，モデル上の演算を定義すればよいか？

<u>定義3.4.</u> $\mathbb{L}+A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$とは，論理(モデルでもかまわない)$\mathbb{L}$に，$A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$を公理として追加して得られる論理．

定理 3.5. $\mathbb{L} \in \mathcal{J}$ とし，A，B は共通な命題変数をもたないとする.

(1) $(\mathbb{L}+A)^{\cup}(\mathbb{L}+B) \supset\subset \mathbb{L}+A+B \supset\subset \mathbb{L}+A\,\&\,B$

(2) $(\mathbb{L}+A) \cap (\mathbb{L}+B) \supset\subset \mathbb{L}+A^{\vee}B$

$\mathcal{J}$ の元の 1-regular モデル $\mathbb{M}_1$, $\mathbb{M}_2$ に対し，$\mathbb{N} = \mathbb{M}_1 \uparrow \mathbb{M}_2$ として次のようなモデルを考えることがある．すなわち，lattice $V_{\mathbb{M}_1}$ の上に $V_{\mathbb{M}_2}$ をのせて（ie. $V_{\mathbb{M}_2}$ の元は $V_{\mathbb{M}_1}$ の元より大きいとする）$V_{\mathbb{M}_1}$ の最大元と $V_{\mathbb{M}_2}$ の最小元を同一視して得られる lattice を，定理 2.8 によるモデルと見て，それを $\mathbb{N}$ とする．

問題 3.6. $\mathcal{S}_1$ に operation を施こして $\mathcal{J}$ の元をすべて得るためには，どのような operation を用意すればよいか．（直積と↑だけでは足りない）．

4. 分類

$\mathcal{J}$ の元の分類を考える．

定義 4.1 $\mathcal{S}_n = \{\mathbb{L} \in \mathcal{J} \mid \mathbb{L}^{\cup}\mathcal{S}_\omega \supset\subset \mathcal{S}_n\}$ $(1 \leq n \leq \omega)$.

定理 4.2. $\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{\omega} \mathcal{S}_n$ (直和)

定義 4.3. $Z = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c)$

$K = ((a_1 \to a_0) \to a_1) \to a_1$

$X_n = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} ((a_i \to a_j) \& (a_j \to a_i))$

$R_n = a_1 \vee (a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_3) \vee \cdots \vee (a_{n-1} \to a_n) \vee \neg a_n$

$$\begin{cases} P_1 = K \\ P_{i+1} = ((a_{i+1} \to P_i) \to a_{i+1}) \to a_{i+1} & (i \geqq 1) \end{cases}$$

$\mathbb{LP}_n = \mathbb{LJ} + P_n$

定理 4.4. (1) $S_n \supset\subset \mathbb{LJ} + R_n \supset\subset \mathbb{LJ} + P_n + Z$ $(n < \omega)$

(2) $S_\omega \supset\subset \mathbb{LJ} + Z$

定理 4.5. S_n と $\mathbb{LP}_n$ は $\mathcal{S}_n$ の最大元と最小元.

定義 4.6. $r(\mathbb{L}) = \min\{i \mid X_i \in \mathbb{L}\}$

定理 4.7. (1) $\mathbb{L} \in \mathcal{S}_n \Rightarrow r(\mathbb{L}) \geqq n+1$

(2) $r(\mathbb{L}) = \omega \Rightarrow \mathbb{L}$ は有限モデルを持たない.

(3) $\mathcal{S}_\omega$ の元は有限モデルを持たない.

(4) $\mathbb{LJ}+A\in\mathcal{S}_n$ ($n<\omega$) $\Rightarrow$ Aは少くともn個の命題変数をもつ.

<u>問題4.8.</u> (1) $\mathbb{LP}_n$ のモデルは?

(2) $\mathcal{S}_n\ni\mathbb{L}$ のとき, $\mathbb{L}\supset\subset\mathbb{LJ}+A$ となるようなn変数のwff Aを定め得るか.

(3) $\gamma(\mathbb{L})=n$のとき, $\mathbb{L}$に対し $^{\#}V=n$ のモデルを与え得るか. Yesという説もあるが, 多分no?

(4) 1-regularモデルでは, かならず, 最小元のすぐ上の元が一つしかないような, 同値なモデルを見つけ得るか. Yesという説もあるが, 多分no?

(5) $\mathcal{S}\ni\mathbb{L}$に対し, $\mathbb{L}$がfinite modelを持たないことの有限的な判定法は?

(6) モデルがseparable axiomatization (定義略)をもつ必十条件は?

(7) $M\uparrow N$の公理化は?